Мысль выражать все числа 9 знаками, предавая им, кроме значения по форме, ещё значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять насколько она удивительна.
французский математик и физик П.С.Лаплас (1749 — 1827)

Урок 2

Тема урока: Системы счисления. Перевод чисел из десятичной системы счисления в недесятичную систему счисления.

Тип урока: изучение нового материала.

Цель урока: расширение представлений о системах счисления и обобщение принципа позиционности;

Требования к знаниям и умениям:

Учащиеся должны знать:

- ✓ 2 способа перевода целых чисел из любой системы счисления в десятичную систему счисления;
- ✓ что такое факториал;
- ✓ какая система счисления называется «факториальной» и где она используется;
- ✓ перевод чисел из десятичной системы счисления в факториальную систему счисления и обратно.

Учащиеся должны уметь:

- ✓ переводить целые числа из любой системы счисления в десятичную 2 способами;
- ✓ найти значение п!
- ✓ приводить примеры чисел в факториальной системе счисления;
- ✓ переводить целые числа из десятичной системы счисления в факториальную систему счисления и обратно.

План урока:

1. Орг. момент
2. Изложение нового материала
3. Закрепление пройденного материала
4. Подведение итогов
5. Рефлексия урока
6. Домашнее задание

1. Орг. момент

Учитель приветствует учеников и проверяет готовность к уроку. Визуально проверяет домашнее задание.

Вопросы:

1. Что такое основание и алфавит системы счисления?
2. Какие символы используют в 3, 9, 16?
3. В системе счисления с некоторым основанием число 12 записывается в виде 110. Укажите это основание.

Решение

1 способ

Условие задачи запишем в виде уравнения: 110x=1210. Переведем число в 10 систему счисления, записав число в развернутом виде: x2+x1=1210. Получили квадратное уравнение: x2+x-12=0. Решаем полученное квадратное уравнение: Дискриминант: D=b2-4ac=12-4.1.(-12)=49>0 - уравнение имеет два корня. x1=(-b+7)/2a=(-1+7)/2=3 и x2=(-b-7)/2a=(-1-7)/2=-4<0 - не может быть основанием системы счисления. Ответ: основание системы счисления равно 3.

2 способ

Условие задачи запишем в виде уравнения: 110x=1210. Переведем число в 10 систему счисления, записав число в развернутом виде: x2+x1=1210. Получили квадратное уравнение: x2+x-12=0.

Перенесем свободный член в правую часть и вынесем x за скобку: x(x+1)=12 – т.е. при перемножении двух чисел должно получиться 12. Это две пары чисел: 2 * 6=12 и 3 * 4=12

Первая пара не соответствует условию, так как числа должны отличаться на 1. Поэтому основание системы счисления равно 3. 3*(3+1)=12.

2. Изложение нового материала

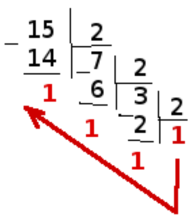
Существует теорема о том, что любое натуральное число можно записать в любой системе счисления единственным образом.

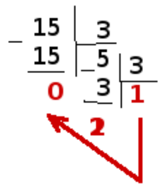
Для того, чтобы преобразовать целое число в систему счисления с основанием n нужно это число делить на n и записывать остатки. Запись числа в системе счисления с основанием n содержит последний результат деления и остатки, записанные в порядке, обратном их появлению. Например:

15 : 2 = 7 (остаток 1)
7 : 2 = 3 (остаток 1)
3 : 2 = 1 (остаток 1)

15 : 3 = 5 (остаток 0)
5 : 3 = 1 (остаток 2)

Можно считать остатки столбиком:





Следовательно, $15_{10}=1111_2$ и $15_{10}=120_3$

Проверка: $15_{10} = 1*2^3 +1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 8 + 4 +2 +1$, то есть $15_{10} = 11111_2$.

$15_{10} = 1*3^2 + 2*3^1 + 0*3^0 = 9 + 6 + 0$, то есть $15_{10} = 120_3$

Задание. Запишите свой день и месяц рождения в двоичной, троичной и 16-ричной системе счисления (учитель визуально проверяет задание).

Существует другой метод перевода из 10 системы счисления в недесятичную. Для перевода целого десятичного числа в систему счисления с основанием п нужно разложить это число на слагаемые, содержащие максимальную степень числа п и выписать коэффициенты (множители) при этих степенях. Вместо отсутствующей степени нужно записать 0. Используем предыдущие примеры из теории.

1. $15–2^3 =15-8=7$;
2. $7-2^2=7-4=3$;
3. $3-2^1=3-2=1$;
4. $1-2^0=1-1=0$;

Записываем полученное число: 1111_2, т.е. 1 раз вычли 2^3 , 1 раз вычли 2^2 , 1 раз вычли 2^1 , 1 раз вычли 2^0 .

1. $15–3^2 =15-9=6$;
2. $6-3^1=6-3=3$;
3. $3-3^1=3-3=0$;

Записываем полученное число: 120_3, т.е. 1 раз вычли 3^2 , 2 раза вычли 3^1 , 0 раз вычли 3^0 .

В этом способе перевода чисел из десятичной системы счисления в недесятичную мы заменили операцию сложения на операцию вычитания. Такой метод перевода называется методом разностей.

Вопрос: Как число недесятичной системы счисления перевести в другую недесятичную систему счисления? (Ученики пытаются ответить на этот вопрос) Ответ: сделать промежуточный перевод в десятичную систему счисления.

3. Закрепление пройденного материала

1. Какое число предшествует числу 10_2 в двоичной системе счисления? Ответ: 1_2**.**
2. Какое следующее число, идущее после числа 10_2 в двоичной системе счисления? Ответ: 11_2**.**

Давайте проверим ответы по таблице соответствия чисел, записанных в различных системах счисления.

Десятичная	**Двоичная**	**Восьмеричная**	**Шестнадцатеричная**
0	000	0	0

1	001	1	1
2	**010**	2	2
3	011	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	**10**	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	**10**

3. Какое число предшествует числу 10_9 в девятеричной системе счисления? Ответ: 8_9.
4. Какое из чисел в двоичном представлении содержит равное количество нулей и единиц (двоичное представление числа начинается с цифры «1»)?

1) 19_{16} 2) 29_{16} 3) 39_{16} 4) 49_{16}

Решение:

1) $19_{16} = 25_{10}=11001_2$

2) $29_{16} = 41_{10}=101001_2$

3) $39_{16} = 57_{10}=111001_2$

4) $49_{16}= 73_{10}=1001001_2$

Ответ: 29_{16}

Можно увидеть какую-либо закономерность? Обратите внимание на цветовую схему этого задания:

1) $19_{16} = 25_{10}=11001_2$

2) $29_{16} = 41_{10}=101001_2$

3) $39_{16} = 57_{10}=111001_2$

4) $49_{16}= 73_{10}=1001001_2$

5. Чему будет равно число 69_{16} в двоичной системе счисления? Ответ: 1101001_2.
6. Сколько существует натуральных чисел x, для которых выполнено неравенство $15_8 < x < 19_{16}$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение: $15_8 =13_{10}$, $19_{16}=25_{10}$, 25-13-1=11. Ответ: 11

2. Изложение нового материала

Часто нужно с использованием закона умножения вычислить произведения натуральных чисел по порядку, начиная с 1. Например, 1* 2* 3* 4* 5* 6 и т. д. Чтобы можно было короче записать выражения такого вида, в математике используется знак «**!**».

Произведение всех натуральных чисел от 1 до п включительно называется факториалом числа п и записывается п! (читается как «эн факториал»).

n! = 1 * 2* 3*...*(п*2)*(п*1)*п.

Принято, что 0!=1.

1!=1;

2!=2*1=2;

3!=3*2*1=6;

4!=4*3*2*1=24;

5!=5*4*3*2*1=120;

6!=6*5*4*3*2*1=720.

Оказывается представление числа может быть не в виде суммы степеней основания Р, а суммой факториалов n первых натуральных чисел.

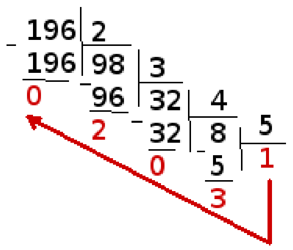
Например,

5 4 3 2 1

1 3 0 2 0 $_{ф}$ **=1*5! + 3*4! + 0*3! + 2*2! + 0*1!= 240+72+4=196** $_{10}$

Эту систему счисления относят к нетрадиционным позиционным и называют *факториальной* системой счисления.

Алгоритм перевода из десятичной системы счисления в факториальную аналогичен алгоритму перевода из десятичной системы в Р-ичную путем деления на основание системы Р. Отличие в том, что в первый раз исходное десятичное число делим на 2, первое частное — на 3, второе частное — на 4 и так далее. Записываем все целочисленные остатки, начиная с последнего.



Замечание. Факториальная система счисления используется для упорядочиваний множества из n элементов. Например, для множества {А,Б,В } из 3-х элементов существует 3! = 6 перестановки: АБВ, БВА, ВАБ, БАВ, ВБА, АВБ.

Количество цифр, используемых в том или ином разряде (размерность алфавита), неодинаково — оно увеличивается с ростом номера разряда. В первом разряде могут быть только цифры 0 и 1, во втором — 0, 1 и 2, в k-м — 0, 1, 2, …, k и так далее.

Задание.

1. Какие числа записаны по правилам факториальной системы счисления: 112132, 2010, 3201, 5021, 1111101, 32230? Ответ: 2010, 3201, 1111101.
2. Переведите число 53 из десятичной системы счисления в факториальную и сделайте проверку обратным переводом. Ответ**:** $2021_{ф}$.
3. Переведите число $121_{ф}$ в десятичную систему счисления. Ответ: 11_{10}

3. Закрепление пройденного материала

1. Найдите такой набор из 5-ти гирь, чтобы располагая их на одной чаше весов, можно было бы взвесить любой груз до 31 кг включительно.

Решение: Используем двоичную систему счисления. Ответ: 1, 2, 4, 8, 16.

2. Задача-игра «Угадывание задуманного числа по отрезкам». Один из учеников (ведущий) задумывает некоторое трехзначное число, мысленно делит задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. Если число нечетное, то от него отбрасывается единица. При каждом делении ведущий чертит на доске отрезок, направленный вертикально, если делится нечетное число, и

горизонтально, если делится четное число. Как на основании полученной фигуры безошибочно определить задуманное число?

4. Решение: Записываем число справа налево (вместо горизонтальных отрезков записываем нули, а вертикальных 1 и переводим его из двоичной системы счисления в десятичную.

5. Для 5 букв латинского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв из двух бит, для некоторых из трех). Эти коды представлены в таблице:

A	B	C	D	E
000	110	01	001	10

Определите, какой набор букв закодирован двоичной строкой 1100000100110

1) baade

2) badde

3) bacde

4) bacdb

Ответ: 3

4. Подведение итогов

Учитель оценивает работу класса, называет учащихся, отличившихся на уроке.

5. Рефлексия урока

Рефлексия урока.

Вопросы ученикам:

- ✓ Что нового вы сегодня узнали на уроке?
- ✓ С какими новыми понятиями познакомились?
- ✓ Выполнение, каких заданий вызвало затруднение?

6. Домашнее задание

Задание на дом

Заполните таблицу:

Двоичная система счисления	**Четверичная система счисления**	**Восьмеричная система счисления**	**Десятичная система счисления**	**Шестнадцатеричная система счисления**	**Факториальная система счисления**
111					
	111				
		111			
			111		
				111	
					111

Ответ:

Двоичная система счисления	**Четверичная система счисления**	**Восьмеричная система счисления**	**Десятичная система счисления**	**Шестнадцатеричная система счисления**	**Факториальная система счисления**
111	13	7	7	7	101
10101	111	25	21	15	311
1001001	1021	111	73	49	3001

1101111	1233	157	111	6F	4211
100010001	10101	421	273	111	21111
1001	21	11	9	9	111

Источники:

1. Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления /В кн. Энциклопедия элементарной математики", кн. 1: Арифметика. М. — Л. 1951, с. 11 — 74.
2. Математические основы информатики. Элективный курс. Учебное пособие. / Андреева Е.В., Босова Л.Л., Фалина И. Н. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2005 – 328 с.
3. Информатика и ИКТ. Задачник-практикум: в 2 т. Т.1/Л.А. Залогова [др.] под ред. И.Г.Семакина, Е.К. Хеннера.- 3-е изд. - : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 309 с.
4. Занимательные задачи по информатике. / Л.Л.Босова, А.Ю.Босова, Ю.Г. Коломенская.- 5-е изд.. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 152 с.
5. Академия информатики и программирования (школьное отделение) 2019-2020. Материалы предназначены для использования в группах подготовки по информатике.
6. Открытый банк заданий ФИПИ