Самая важная цифра есть нуль. Это была гениальная идея — сделать нечто из ничего, дать этому нечто имя и изобрести для него символ

Ван дер Варден (р. в 1903 г.)

Урок 1

Тема урока: Позиционные системы счисления. Перевод чисел из недесятичной системы счисления в десятичную систему счисления.

Класс: 8 класс

Тип урока: Урок формирования новых знаний.

Цель урока: сформировать у учащихся понятие «позиционные системы счисления»

Требования к знаниям и умениям:

Учащиеся должны знать:

- ✓ определение следующих понятий: «цифра», «число», «система счисления», «непозиционная система счисления»; алфавит системы счисления и ее базис;
- ✓ какая система счисления называется «позиционной» и почему;
- ✓ приводить примеры позиционных систем счисления;
- ✓ развернутую форму записи числа в позиционной системе счисления;
- ✓ перевод целых чисел из любой системы счисления в десятичную систему счисления

Учащиеся должны уметь:

- ✓ записывать числа в непозиционных системах счисления;
- ✓ приводить примеры чисел различных позиционных систем счисления, определять основание системы счисления;
- ✓ записывать числа позиционной системы счисления в развернутой форме;
- ✓ переводить целые числа из любой системы счисления в десятичную систему счисления.

План урока:

1. Организационный момент
2. Изложение нового материала
3. Закрепление пройденного материала
4. Подведение итогов
5. Рефлексия урока
6. Домашнее задание

1. Орг. момент

Учитель приветствует учеников и проверяет готовность к уроку. Целевая установка: объявление темы, цели занятия

2. Изложение нового материала

Информацией называют сведения о предметах, процессах и явлениях окружающего нас мира. Информация – это нематериальное отображение материальных объектов и результатов их взаимодействия.

Для материализации информации (однозначного отображения и передачи) используется *символизация информации*, то есть описание объектов или явлений с помощью символов того или иного алфавита.

Символизацию информации (представление в виде символов) называют *кодированием*. Кодируют информацию с целью ее передачи или хранения.

Эллинский мудрец Пифагор объявил два с половиной тысячелетия назад, что «Все есть число». Если снять с этого тезиса мистическую патину, то нам откроется гениальное пророчество, определившее весь последующий путь развития науки. Тогда древний пифагорейский тезис примет современное звучание: математика есть ключ к познанию всех тайн природы.

Числа древними греками, а вместе с ними Пифагором и пифагорейцами мыслились зримо, в виде камешков, разложенных на песке или на счетной доске – абаке. По этой причине греки не знали нуля, так как его невозможно было «увидеть». Но и единица еще не была полноправным числом, а представлялась как некий «числовой атом», из которого образовывались все числа. Пифогорейцы называли единицу «границей между числом и частями», т.е. между целыми числами и дробями, но в то же время видели в ней «семя и вечный корень». Число же определялось как **множество, составленное из единиц**. Особое положение единицы как «числового атома» роднило ее с точкой, считавшейся «геометрическим атомом». Вот почему Аристотель писал: « Точка есть единица, имеющая положение, единица есть точка без положения». Итак, пифагорейские числа в современной терминологии – это натуральные числа.

Замечание. Именно от «счета камешками» произошли популярные сегодня слова «калькуляция», «калькулятор». *Calculus* — по-латыни камешек. Счет камешками — *calculation* — древние римляне переняли у древних греков.

Современного человека повсюду окружают числа: номера телефонов, машин, паспорта, стоимость товаров, покупки.

Число изображается с помощью некоторых символов, которые называются цифрами.

Вопрос 1: Что такое цифры? (Ученики пытаются ответить на этот вопрос). Символы, при помощи которых записываются целые неотрицательные числа, называются *цифрами*, а их совокупность — *алфавитом* системы счисления. Количество цифр, составляющих алфавит, называется его *мощностью* или *размерностью*.

Система счисления или *нумерация* — это способ записи (обозначения) чисел.

Вопрос 2: Сколько существует систем счислений? (Ученики пытаются ответить на этот вопрос). Ответ: сколько угодно.

Системы счисления можно разделить на непозиционные и позиционные.

Римская система счисления - непозиционная система счисления, в которой для записи чисел используются буквы латинского алфавита:

1 - I, 5 - V, 10 - X, 50 - L, 100 - C, 500 - D и 1000 - M.

Задание Сформулируйте правила, по которым вычисляется значение числа в римской системе счисления.

Решение:

Для правильной записи больших чисел римскими цифрами необходимо *сначала записать число тысяч, затем сотен, затем десятков и, наконец, единиц*. Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. При этом, *если большая цифра стоит перед меньшей, то они добавляются* (**принцип сложения**), если же *меньшая – перед большей, то меньшая вычитается из большей* (**принцип вычитания**). Последнее правило применяется только во избежание четырехкратного повторения одной цифры.

В настоящее время римская система счисления применяется:

- ✓ обозначения веков, годов н. э. и месяцев при указании дат
- ✓ обозначение порядковых числительных.
- ✓ обозначение валентности химических элементов.

Система счисления называется *позиционной*, если количественный эквивалент цифры зависит от ее положения в записи числа.

В 10 с/с значение числа образуется следующим образом: значения цифр умножаются на «веса» соответствующих разрядов и все полученные значения складываются. Например, 5379 = 5*1000 + 3*100 + 7*10 + 9*1, где 1000, 100, 10 и – это «веса» разрядов. Такая форма записи числа называется *развернутой,* а способ такого образования значения числа называется *аддитивно-мультипликативным*. **Аддитивность** (от лат. additivus — прибавляемый) , свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, каким бы образом ни был разбит объект. Например, аддитивность объема означает, что объем целого тела равен сумме объемов его частей.

Вопрос 3: Римская система счисления является ли аддитивно-мультипликативной? (Ученики пытаются ответить на этот вопрос). Ответ: римская система является аддитивной, т.к. значение числа образуется только при помощи сложения или вычитания значений цифр, его образующих.

Последовательность чисел, каждое из которых задает «вес» соответствующего разряда, называется *базисом* позиционной системы счисления. Например, базис для двоичной системы счисления: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 и т.д. Это 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,2^4,…

Замечание. Основное достоинство практически любой позиционной системы счисления — возможность записи произвольного числа при помощи ограниченного количества символов.

Для записи чисел в позиционной системе с основанием n нужно иметь алфавит из n цифр. Обычно для этого при n < 10 используют n первых арабских цифр, а при n > 10 к десяти арабским цифрам добавляют буквы. Вот примеры алфавитов нескольких систем:

Система счисления	**Основание**	**Размерность алфавита**	**Алфавит**	**Базис**
Двоичная	2	2	0, 1	2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,…
Троичная	3	3	0, 1, 2	3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4,…
Восьмеричная	8	8	0, 1, 2,3,4, 5,6,7	8^0, 8^1, 8^2, 8^3, 8^4…
Шестнадцатеричная	16	16	0, 1, 2,3,4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	16^0, 16^1, 16^2, 16^3, …

Замечание. Обратите внимание на правописание слова пятеричный (не пятиричный). Так же пишутся слова четверичный, двенадцатеричный, шестидесятиричный н т. п. Дело в том, что, например, слово пятеричный происходит от старого слова пятерица — пятерка. (Точно так же от слов двоица и троица образованы прилагательные двоичный, троичный.) Конечно, таких слов, как двенадцатерица или шестидесятитерица, никогда не существовало; слова одиннадцатеричный, двенадцатерич-ный и т. д. образованы по аналогии. Раньше их часто писали через «и», но теперь ради единообразия и для них принято написание через «е».

Пример 1

Вернемся к нашему числу 5379 и продолжим преобразование, но вначале пронумеруем разряды:

3 2 1 0

$\mathbf{5\,3\,7\,9_{10} = 5*1000 + 3*100 + 7*10 + 9*1 = 5*10^3 + 3*10^2 + 7*10^1 + 9*10^0}$

Теперь будем выносить общий множитель 10 за скобки:

3 2 1 0

$\mathbf{5\,3\,7\,9_{10} = 5*10^3 + 3*10^2 + 7*10^1 + 9*10^0 = (5*10^2 + 3*10 + 7)*10 + 9 = ((5*10 + 3)*10 + 7)*10 + 9}$

Мы получили выражение, состоящее из цифр исходного числа и основания системы счисления. Оно позволяет найти число, используя только умножение и сложение (без возведения в степень.)

Позиционную систему счисления называют *традиционной*, если ее базис образуют члены геометрической прогрессии (последовательность чисел, у которой каждое последующее число равно предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число, называемое общим коэффициентом, или знаменателем), а значения цифр есть целые неотрицательные числа.

Вопрос 4: Назовите знаменатель для четверичной системы счисления? (Ученики пытаются ответить на этот вопрос) Ответ: 4.

Базисы десятичной, двоичной и восьмеричной систем счисления образуют геометрические прогрессии со знаменателями 10, 2 и 8 соответственно.

Знаменатель P геометрической прогрессии, члены которой образуют базис традиционной системы счисления, называется *основанием* этой системы счисления. Традиционные системы счисления с основанием P иначе называют P-ичными.

В P-ичных системах размерность алфавита равна основанию системы счисления.

Так, алфавит десятичной системы составляют цифры 0, 1,2, 3, 4, 5, б, 7, 8, 9. Алфавитом произвольной системы счисления с основанием P служат числа 0, 1, ... , P-1, каждое из которых должно быть записано с помощью одного уникального символа, младшей цифрой всегда является 0.

Развернутой формой записи числа называется запись в виде.

$$A_P = \pm(a_{n-1}P^{n-1}+a_{n-2}P^{n-2}+\ldots a_0P^0+a_{-1}P^{-1}+a_{-2}P^{-2}+\ldots a_{-m}P^{-m})$$

A – само число;

P – основание системы счисления;

a_i – цифры данной системы счисления;

n – число разрядов целой части числа;

m – число разрядов дробной части числа.

Пример 2. Получить развернутую форму десятичных чисел 34298; 36,837.

Решение

34298_{10} = 3 * 10000 + 4 * 1000 + 2 * 100 + 8 * 10 + 8 = = $3*10^4 + 4*10^3 + 2*10^2 + 9*10^1 + 8 * 10^0$

$36,837_{10} = 3*10^1+6*10^0+8*10^{-1}+3*10^{-2}+3*10^{-3}$

Пример 3. Получить развернутую форму чисел 112_3, 101101_2, $15FC_{16}$, $101,11^2$.

Замечание. Число 112_3 читается «один, один, два в троичной системе счисления», а не «сто двенадцать в троичной системе счисления». Также читаются и все остальные числа примера.

Решение

$112_3 = 1 * 10^2 + 1 * 10^1 + 2 * 10^0$.

$101101_2 = 1 * 10^{101} + 0 * 10^{100}+ 1 * 10^{11} + 1 * 10^{10} + + 0 * 10^1 + 1 * 10^0$.

$15FC_{16} = 1 * 10^3 + 5 * 10^2 + F * 10^1 + C * 10^0$.

$101,11_2 = 1 * 10^{10} + 0 * 10^1 + 1 * 10^0 + 1 * 10^{-1} + 1 * 10^{-10}$.

Обратите внимание, что в любой системе счисления ее основание записывается как 10.

Если все слагаемые в развернутой форме недесятичного числа представить в десятичной системе и вычислить полученное выражение по правилам десятичной арифметики, то получится число в десятичной системе, равное данному. По этому принципу производится перевод из недесятичной системы в десятичную.

Пример 4. Все числа из предыдущего примера перевести в десятичную систему.

Решение

$112_3 = 1 * 3^2 + 1 * 3^1 + 2*3^0 = 9 + 3 + 2 = 14_{10}$.

$101101_2 = 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1*2^0 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45_{10}$.

$15FC_{16} = 1 * 16^3 + 5 * 16^2 + 15 * 16^1 + 12 * 16^0 = 4096 + 1280 + 240 + 12 = 5628_{10}$.

$101,11_2 - 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} = 4 + 1 + 1/2 + 1/4 = 5 + 0,5 + 0,25 = 5,75_{10}$

3. Закрепление пройденного материала.

1. Выберите наибольшее число: 11_3, 11_7, 11_{16}

Решение: 11_3, 11_7, 11_{16} – записаны одними символами в разных системах счисления. Значит, значение наибольшего числа будет зависеть от значения основания с/с. Чем выше значение системы, тем больше будет число. Ответ: 11_{16}

2 Среди трёх чисел, записанных в различных системах счисления, найдите минимальное: $1D_{16}$, 36_8, 100010_2.

Решение: $1D_{16}$=1*16+ D (13)*1=29_{10}; 36_8=3*8+6*1=30_{10}; 100010_2=1*32+1*2=$34_{10.}$

Ответ: $1D_{16}$

3. Число 62 в некоторой системе счисления с основанием х записывается как 62_x. Найдите основание этой системы счисления.

Решение: 14= 32_x. Представим 32_x в развернутой форме. $32_x=3*x^1+2*x^0=3*x+2$. Значит 3*х+2=14. х=4. Ответ: 4

4. Подведение итогов

Учитель оценивает работу класса, называет учащихся, отличившихся на уроке.

5. Рефлексия урока

Рефлексия урока.

Вопросы ученикам:

- ✓ Что нового вы сегодня узнали на уроке?
- ✓ С какими новыми понятиями познакомились?
- ✓ Выполнение, каких заданий вызвало затруднение?

6. Домашнее задание

Задание на дом

1. Разбейте строку XIXCXIXL цифр на корректные римские числа так, чтобы сумма всех чисел была как можно меньше.

Решение:

Строки вида IXL и IXC можно посчитать по-разному, например, IXL = I + XL = 1 + 40 = 41 или IXL = IX + L = 9 +50 = 59. Для уменьшения суммы их нужно разбивать так: IXL = I + XL, IXC = I + XC.

XIXCXIXL = X + I + XC + X + I + XL = 10 + 1 + 90 + 10 + 1 + 40 = 152.

2. В системе счисления с некоторым основанием N число 12 записывается в виде 15_N. Найдите это основание.

Решение: $15_N=1*N^1+5*N^0=N+5$. N+5=12. N=7. Ответ: 7.

3. Переведите числа: 111_3, 111_5, 111_7, в десятичную систему счисления.

Решение:

$111_3=1*3^2+1*3^1+1*3^0=9+3+1=13_{10}$

$111_5=1*5^2+1*5^1+1*5^0=25+5+1=31_{10}$

$111_7=1*7^2+1*7^1+1*7^0=49+7+1=57_{10}$

4. Записать в тетрадь двоичный ряд чисел: 2^0=, 2^1=, 2^2=, … 2^{14}=, 2^{15}=, 2^{16}=.

Источники:

1. Ван дер Варден В.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: ГИФМЛ, 1959.
2. Волошинов А.В. Пифагор: союз истины , добра и красоты. – М.: Просвещение, 1993. – 224 с.
3. Гладкий А.В. Числа: натуральные, рациональные, действительные, комплексные: Учебное пособие для общеобразовательной школы. –М.: Вербум-М, 200. – 144 с.
4. Математические основы информатики. Элективный курс. Учебное пособие. / Андреева Е.В., Босова Л.Л., Фалина И. Н. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2005 – 328 с.
5. Информатика и ИКТ. Задачник-практикум: в 2 т. Т.1/Л.А. Залогова [др.] под ред. И.Г.Семакина, Е.К. Хеннера.- 3-е изд. - : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 309 с.
6. Академия информатики и программирования (школьное отделение) 2019-2020. Материалы предназначены для использования в группах подготовки по информатике.