

Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя школа
№7 имени адмирала Ф.Ф.Ушакова

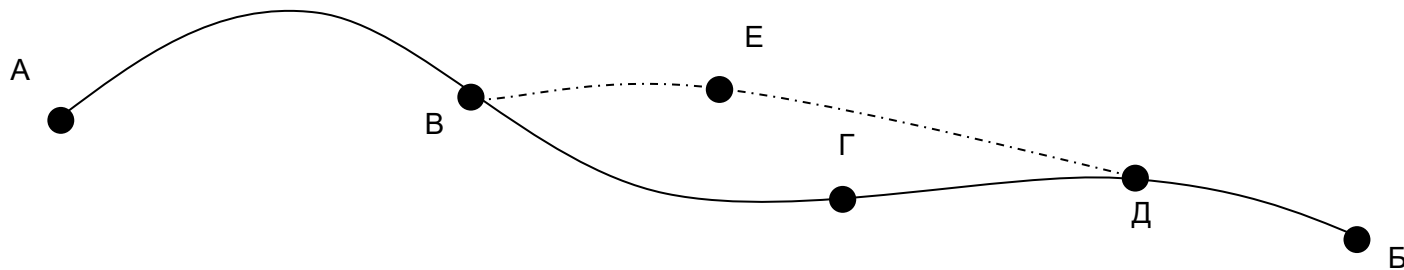
Динамическое программирование в электронных таблицах (18 задания ЕГЭ)

Учитель информатики
Терехова Е.В.

Что проверяется:

- умение обрабатывать вещественные выражения в электронных таблицах;
- использование инструментов решения статистических и расчётно-графических задач;
- умение представлять и анализировать табличную информацию в виде графиков и диаграмм.

Задачи этого типа успешно и быстро решаются с помощью динамического программирования – метода оптимизации, который предложил американский математик *Ричард Беллман*. Он сформулировал очень простой принцип оптимальности пути: **любая часть оптимального пути оптимальна**. Например, пусть мы нашли оптимальный путь из точки А и точку Б, который проходит через точки В, Г и Д:



Принцип Беллмана утверждает, что, например, путь ВГД – это оптимальный путь из В в Д. Если бы это было не так и существовал бы другой, лучший путь между В и Д (например, ВЕД на рисунке), то и путь АВГДБ не был бы оптимальным.

Простой пример

Робот идёт по клетчатому полю из левого верхнего угла в правый нижний; на каждом шаге он может переместиться на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. В каждой клетке лежит заданное количество монет:

	A	B	C
1	63	78	58
2	10	1	42
3	25	29	87

Нужно найти такой путь из клетки A1 в клетку C3, пройдя по которому Робот соберёт наибольшее количество монет.

Простой пример

Задачи этого типа решают с конца, то есть сначала предполагают, что Робот стоит в клетке С3, в конечной точке. У него есть единственный вариант – собрать 87 монет, никуда не двигаясь. Построим дополнительную таблицу, в которой для каждой клетки будем записывать наибольшее число монет, которое может собрать Робот, пройдя из этой клетки в конечную. В правом нижнем углу пишем 87:

	А	В	С
1			
2			
3			87

Простой пример

Рассмотрим клетку В3: стартовав из неё Робот может сделать только один шаг в С3, собрав всего $29 + 87 = 116$ монет; аналогично при старте из С2 робот собирает монеты из ячеек С2 и С3, всего $42 + 87 = 129$:

	A	B	C
1			
2			129
3		116	87

Заметим, что из А3 есть только один возможный путь – через В3, Робот соберёт $25 + 116 = 141$ монету; аналогично из С1 есть только путь через С2, Робот соберёт $58 + 129 = 187$ монет:

	A	B	C
1			187
2			129
3	141	116	87

Простой пример

Если Робот стартует из клетки B2, у него есть выбор: пойти вправо

(набрав $1+129=130$ монет) или вниз ($1+116=117$ монет); очевидно, что первый вариант лучше, так что в эту ячейку записываем 130 (как лучшую из двух сумм).

Аналогично в каждую из остальных ячеек записываем лучшую из двух сумм, которые можно получить при движении вправо и вниз. Наибольшая сумма, которую может собрать Робот, двигаясь из

левого верхнего угла в правый нижний, находится в ячейке A1 рабочей таблицы, она равна 328.

	A	B	C
1			187
2		130	129
3	141	116	87

	A	B	C
1	328	265	187
2	151	130	129
3	141	116	87

Пример 1.

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: вправо или вниз. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вниз – в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. **Посетив клетку, Робот забирает монету с собой только в том случае, если её номинал – число, кратное 3; если номинал монеты – число, не кратное 3, то Робот не берёт монету;** это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота. Определите максимальную и минимальную денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из левой верхней клетки в правую нижнюю. В ответе укажите два числа – сначала максимальную сумму, затем минимальную.

Пример 1.

Для решения задачи используем дополнительные функции: **ЕСЛИ()** и **ОСТАТ()**.

Функция **ОСТАТ(число;делитель)** имеет два аргумента и возвращает остаток от деления значения параметра число на значение параметра делитель, который можно сравнить с 0 для определения кратности числа делителю.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	51	21	93	48	45	100	67	39	18	29	
2	57	43	97	51	92	10	93	32	19	58	
3	63	16	31	16	78	88	90	72	37	67	
4	10	57	64	25	96	50	81	65	91	69	
5	99	43	95	7	40	76	18	34	5	65	
6	35	19	71	77	64	38	62	56	10	2	
7	100	57	27	26	51	33	100	11	53	1	
8	11	79	49	46	37	69	80	31	25	39	
9	22	71	20	23	11	12	39	16	64	34	
10	4	25	87	84	30	48	77	13	40	33	
11											

Робот начинает движение из верхнего левого угла (из ячейки **A1**) и перемещается в правый нижний (то есть в **J10**).

Пример 1.

Рассмотрим нижний ряд: если Робот находится в одной из ячеек последней строки 10, то он может идти только вправо, собирая монеты в последней строке; например, начав движение из ячейки **I10** он соберёт монету в этой ячейке, если её номинал кратен 3 и во всех (в данном случае – в одной) следующих (опять же только если номинал монет кратен 3),

то есть формула в ячейке

I22 должна быть

= ЕСЛИ(ОСТАТ(I10;3)=0;I10;0)+J22.

эту формулу копируем

(протаскиваем за маркер

заполнения) по всей строке 22.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	51	21	93	48	45	100	67	39	18	29
2	57	43	97	51	92	10	93	32	19	58
3	63	16	31	16	78	88	90	72	37	67
4	10	57	64	25	96	50	81	65	91	69
5	99	43	95	7	40	76	18	34	5	65
6	35	19	71	77	64	38	62	56	10	2
7	100	57	27	26	51	33	100	11	53	1
8	11	79	49	46	37	69	80	31	25	39
9	22	71	20	23	11	12	39	16	64	34
10	4	25	87	84	30	48	77	13	40	33
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22	282	282	282	195	111	81	33	33	33	33

Пример 1.

Аналогично если Робот находится в последнем столбце, он может двигаться только вниз, собирая по пути все монеты, номинал которых кратен 3; вводим в ячейку **J21** формулу **=ЕСЛИ(ОСТАТ(J9;3)=0;J9;0)+J22**

и протаскиваем
(копируем) её вверх на
весь столбец J
вспомогательной
таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	51	21	93	48	45	100	67	39	18	29
2	57	43	97	51	92	10	93	32	19	58
3	63	16	31	16	78	88	90	72	37	67
4	10	57	64	25	96	50	81	65	91	69
5	99	43	95	7	40	76	18	34	5	65
6	35	19	71	77	64	38	62	56	10	2
7	100	57	27	26	51	33	100	11	53	1
8	11	79	49	46	37	69	80	31	25	39
9	22	71	20	23	11	12	39	16	64	34
10	4	25	87	84	30	48	77	13	40	33
11										
12										
13										141
14										141
15										141
16										141
17										72
18										72
19										72
20										72
21										33
22	282	282	282	195	111	81	33	33	33	33

Пример 1.

Займёмся центральными ячейками жёлтой таблицы, которые пока не заполнены, для них пропишем следующую формулу

=ЕСЛИ(ОСТАТ(I9;3)=0;I9;0)+МАКС(I22;J21); обратите

внимание, что оба аргумента функции **МАКС** находятся в рабочей таблице.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	51	21	93	48	45	100	67	39	18	29
2	57	43	97	51	92	10	93	32	19	58
3	63	16	31	16	78	88	90	72	37	67
4	10	57	64	25	96	50	81	65	91	69
5	99	43	95	7	40	76	18	34	5	65
6	35	19	71	77	64	38	62	56	10	2
7	100	57	27	26	51	33	100	11	53	1
8	11	79	49	46	37	69	80	31	25	39
9	22	71	20	23	11	12	39	16	64	34
10	4	25	87	84	30	48	77	13	40	33
11										
12										
13										141
14										141
15										141
16										141
17										72
18										72
19										72
20										72
21									33	33
22	282	282	282	195	111	81	33	33	33	33

Пример 1.

Первый ответ к задаче – это максимальная сумма, накопленная при движении из левого верхнего угла; она записана в левом верхнем углу рабочей таблицы, то есть в ячейке **A13** (она выделена зелёным фоном):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	51	21	93	48	45	100	67	39	18	29
2	57	43	97	51	92	10	93	32	19	58
3	63	16	31	16	78	88	90	72	37	67
4	10	57	64	25	96	50	81	65	91	69
5	99	43	95	7	40	76	18	34	5	65
6	35	19	71	77	64	38	62	56	10	2
7	100	57	27	26	51	33	100	11	53	1
8	11	79	49	46	37	69	80	31	25	39
9	22	71	20	23	11	12	39	16	64	34
10	4	25	87	84	30	48	77	13	40	33
11										
12										
13	684	633	612	519	465	405	405	252	159	141
14	585	471	471	471	420	405	405	213	141	141
15	528	423	420	420	420	312	312	213	141	141
16	465	423	342	342	342	222	222	141	141	141
17	465	366	309	246	246	195	90	72	72	72
18	366	366	309	246	246	195	72	72	72	72
19	366	366	309	246	246	195	72	72	72	72
20	282	282	282	195	162	162	72	72	72	72
21	282	282	282	195	111	93	72	33	33	33
22	282	282	282	195	111	81	33	33	33	33

чтобы найти наименьшую возможную сумму, нужно в формуле в п. 9 заменить функцию **МАКС** на **МИН**:
=ЕСЛИ(ОСТАТ(I9;3)=0;I9;0)+МИН(I22;J21)

Пример 2.

Дана последовательность натуральных чисел. Рассматриваются всевозможные пары чисел, находящиеся на расстоянии не менее 3 чисел друг от друга. В каком количестве таких пар сумма чисел чётна. Исходная последовательность записана в виде одной строки электронной таблицы.

Рассмотрим решение на примере следующей таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	45	92	74	27	76	86	70	85	75	55	39	64	39	29

Пример 2.

Для определённости будем двигаться справа налево. Для каждого числа a_i рассмотрим набор из предыдущих чисел (кроме последних трёх). Число a_i будет образовывать подходящие пары с числами такой же чётности. Для каждого числа вычислим остаток от деления на 2. В ячейке **A2** запишем формулу **=ОСТАТ(A1;2)** и скопируем её на все остальные ячейки второй строки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	45	92	74	27	76	86	70	85	75	55	39	64	39	29
2	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1

Пример 3.

Дана последовательность натуральных чисел. Рассматриваются всевозможные пары чисел, находящиеся на расстоянии не более 4 чисел друг от друга. В каком количестве таких пар сумма чисел меньше 100. Исходная последовательность записана в виде одной строки электронной таблицы. Рассмотрим решение на примере следующей таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	45	92	74	27	76	86	70	85	75	55	39	64	39	29

Пример 3.

Для определённости будем двигаться справа налево. Для каждого числа a_i рассмотрим набор из пяти предыдущих чисел (если таковые существуют). Число a_i будет образовывать подходящие пары с числами, меньшими $100 - a_i$. С помощью формулы **СЧЁТЕСЛИ** подсчитаем, сколько из предыдущих пяти чисел меньше $100 - a_i$. Например, в ячейке F2 формула будет иметь вид **=СЧЁТЕСЛИ(A1:E1;"<"&(100-F1))**. Формулу запишем в ячейку F2 и скопируем во все ячейки строки. Для первых 5 чисел формулу необходимо откорректировать.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	45	92	74	27	76	86	70	85	75	55	39	64	39	29
2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	2	4

